«Теория принятия решений»

Тема 3. **Оценка эффективности решений**

Лекция. **Оценка эффективности решений на основе функции полезности**

Цель: Показать критерии и общие процедуры оценки эффективности с использованием функции полезности в разнотипных операциях.

Время - 4 часа

Учебные вопросы:
1. *Оценка эффективности решений в детерминированных операциях*
2. *Оценка эффективности решений в вероятностных операциях*
3. *Оценка эффективности решений в неопределенных операциях*

1. Оценка эффективности решений в детерминированных операциях

Полезность является универсальной и объективной мерой оценки исходов операций. Знание функции полезности дает общую основу для оценки эффективности и в детерминированных, и в вероятностных, и в неопределенных операциях. Однако сами критерии для каждого типа операции строятся на этой основе по-разному. Наиболее просто эффективность решений оценивается в случае детерминированных операций, наиболее сложно - в случае неопределенных операций.

Рассмотрим критерии и процедуры оценки эффективности решений применительно к каждому типу операций.

Детерминированные операции являются наиболее простым типом операций. Информация, требуемая для принятия решений, известна полностью. Решения и исходы операции связаны однозначно - каждому решению соответствует один вполне определенный исход. В этом случае безразлично, что выбирать - решения или исходы операций, и данные понятия здесь могут отождествляться.

Простой характер связи между решениями на операцию и ее исходами определяет и простоту оценки эффективности решений. Так как каждое решение связано с одним исходом, то полезность исхода может служить одновременно и мерой оценки решения с точки зрения достижения поставленной цели - его критерием эффективности (табл.1)

Таблица 1

$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{r}_k$	$F(\mathbf{r}_k)$	$U(\mathbf{x}_l)$
$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{r}_1$	$F(\mathbf{r}_1)$	$U(\mathbf{x}_1)$
$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{r}_2$	$F(\mathbf{r}_2)$	$U(\mathbf{x}_2)$
. . .	. . .	. . .	. . .
$\mathbf{x}_m$	$\mathbf{r}_m$	$F(\mathbf{r}_m)$	$U(\mathbf{x}_m)$

Таким образом, эффективность решений в детерминированной операции определяется по функции полезности:

$$U(\mathbf{x}_i) = F(\mathbf{r}_i), \quad i = 1,...,m.$$

Оптимальным решением является то, которое приводит к исходу, обладающему максимальной полезностью

$$U_o = \max F(\mathbf{r}_i), \quad i = 1,...,m.$$

Заметим, что выбор оптимального решения в детерминированных операциях возможен и без определения самой функции полезности - достаточно установить относительную предпочтительность исходов $\left(r_1 \succ r_2 \succ \ldots \succ r_m\right)$. Очевидно, решение, которому соответствует наиболее предпочтительный исход, и будет оптимальным.

В реальных условиях трудно найти детерминированные операции. Однако сложности исследования вероятностных и неопределенных операций вынуждают искусственно вводить в них детерминизм. Например, можно заменить случайные величины их математическими ожиданиями и оперировать мим как детерминированными. Детерминированным операциям соответствуют более простые модели и для них разработан мощный математический аппарат. Поэтому нередко выгоднее проводить исследование операции на упрощенной детерминированной модели с использованием точных математических методов, чем на более адекватной вероятностной (неопределенной) модели, но с использованием приближенных математических методов.

2. Оценка эффективности решений в вероятностных операциях

Вероятностные операции выполняются в условиях с элементами случайности. Однозначность соответствия между решениями и исходами операций нарушается. Каждому решению ставится в соответствие не один, а множество исходов с известными вероятностями появления $p(\mathbf{r}_k/\mathbf{x}_i)$. Очевидно, что оценивать решения в операциях данного типа так, как в детерминированных операциях, нельзя.

Эффективность решений в вероятностных операциях находится через математическое ожидание функции полезности на множестве исходов

$$U(\mathbf{x}) = \mathrm{M}_x[F(\mathbf{r})].$$

При исходах $\mathbf{r}_k$ ($k = 1,...,l$) с дискретными значениями показателей, каждый из которых появляется с условной вероятностью $p(\mathbf{r}_k/\mathbf{x}_i)$ и имеет полезность $F(\mathbf{r}_k)$, выражение для определения математического ожидания функции полезности записывается в виде

$$U(x_i) = \sum_{k=1}^{l} p(r_k / x_i) F(r_k), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Из этого выражения как частный случай может быть получена оценка эффективности решений для детерминированных операций, если принять, что исход, соответствующий решению, наступает с вероятностью, равной единице, а вероятности остальных исходов равны нулю.

Условия оценки решений в случае, когда показатели исхода операции являются дискретными величинами, удобно задавать таблично (табл.2).

Таблица 2

$\mathbf{x}_i$	$\mathbf{r}_k$	$p(\mathbf{r}_k/\mathbf{x}_i)$	$F(\mathbf{r}_k)$	$U(\mathbf{x}_l)$
$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ . . . $\mathbf{r}_l$	$p(\mathbf{r}_1/\mathbf{x}_1)$ $p(\mathbf{r}/\mathbf{x}_1)$ . . . $p(\mathbf{r}_1/\mathbf{x}_1)$	$F(\mathbf{r}_1)$ $F(\mathbf{r}_2)$ . . . $F(\mathbf{r}_l)$	. . .
$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ . . . $\mathbf{r}_l$	$p(\mathbf{r}_1/\mathbf{x}_2)$ $p(\mathbf{r}/\mathbf{x}_2)$ . . . $p(\mathbf{r}_1/\mathbf{x}_2)$	$F(\mathbf{r}_1)$ $F(\mathbf{r}_2)$ . . . $F(\mathbf{r}_l)$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$\mathbf{x}_m$	$\mathbf{r}_1$ $\mathbf{r}_2$ . . . $\mathbf{r}_l$	$p(\mathbf{r}_1/\mathbf{x}_m)$ $p(\mathbf{r}/\mathbf{x}_m)$ . . . $p(\mathbf{r}_1/\mathbf{x}_m)$	$F(\mathbf{r}_1)$ $F(\mathbf{r}_2)$ . . . $F(\mathbf{r}_l)$	. . .

При исходах с непрерывными значениями показателей математическое ожидание функции полезности определяется как

$$U(x_i) = \int\limits_{R_Д} f(r/x_i)F(r)dr,$$

где $f(r/x_i)$ - плотность вероятностей исходов; $R_Д$ - допустимая область векторного пространства исходов.

Таким образом, для оценки эффективности решений в вероятностной операции необходимо:

- определить исходы операции по каждому решению;
- построить функцию полезности на множестве исходов операции;
- найти распределение вероятностей на множестве исходов операции;
- рассчитать математическое ожидание функции полезности на множестве исходов операции для каждого решения.

Оптимальное решение - это решение с максимальным значением математического ожидания функции полезности на множестве исходов операции:

$$U_o = \max_{x_i} M_{x_i}[F(r)], \quad i = 1, \dots, m.$$

Оптимизация в условиях вероятностной операции - это оптимизация в среднем. Она не исключает случаи неоптимального решения на конкретную реализацию операции. Однако если операция будет многократно повторяться, то оптимальное в среднем решение приведет к наибольшему эффекту.

Сведение задачи оценки к вероятностной применимо для операций, имеющих массовый характер, для которых имеется возможность определить объективные показатели исходов, вероятностные характеристики по параметрам обстановки и законы распределения вероятностей на множестве исходов операций.

Кроме оптимизации «в среднем» в вероятностных операциях используются и другие критерии оценки:

- максимум вероятности случайного события;
- максимум степени вероятной гарантии достижения результата не ниже требуемого уровня;
- минимум среднего квадрата отклонения результата от требуемого;
- минимум дисперсии результата и др.

Рассмотрение этих критериев составляет один из разделов теории принятия решений.

3. Оценка эффективности решений в неопределенных операциях

По сравнению с вероятностными операциями для неопределенных операций характерно отсутствие вероятностных характеристик по параметрам обстановки. В силу этого нельзя определить и законы распределения вероятностей на множестве исходов операции. Недостаточность сведений об обстановке порождает ситуацию неопределенности. На практике обычно стремятся к тому, чтобы снять неопределенность. Если это удается сделать, то операция становится либо детерминированной, либо вероятностной. Однако добиться полного снятия неопределенности во многих операциях не представляется возможным. Какие-то данные обстановки будут все-таки отсутствовать.

Условия оценки эффективности для неопределенных операций можно представить в виде табл.3.

Таблица 3

x_i	y_j				
	y_1	y_2	...	y_n	$U(x_i)$
x_1	u_{11}	u_{12}	...	u_{1n}	
x_2	u_{21}	u_{22}	...	u_{2n}	
...	...	...	...	...	...
x_m	u_{m1}	u_{m2}	...	u_{mn}	

В этой таблице:

$\mathbf{x}_i$ - вектор управляемых параметров, определяющий решение (i = 1,...,m);

$\mathbf{y}_j$ - вектор неуправляемых параметров, определяющий состояние обстановки (i = 1,...,n);

$\mathbf{u}_{ij}$ - значение эффективности решения $\mathbf{x}_i$ для состояния обстановки $\mathbf{y}_j$;

$\mathbf{U}(\mathbf{x}_i)$ - эффективность решения $\mathbf{x}_i$.

Каждая строка таблицы содержит значения эффективности одного решения для всех условий обстановки, а каждый столбец - значения эффективности для всех решений при одном и том же состоянии обстановки.

В неопределенной операции известно множество состояний обстановки и эффективность решений для каждого из них, но нет данных, с какой вероятностью появится то или иное состояние. Неопределенная операция распадается на ряд из n операций, которые могут быть либо детерминированными, либо вероятностными, а порядок оценки эффективности этих решений известен.

В зависимости от характера неопределенности операции делятся на игровые и статистически неопределенные. В игровых операциях неопределенность вносит своими сознательными действиями соперник. Для исследования таких операций используется теория игр. Условия статистически неопределенных операций зависят от объективной действительности, называемой «природой». Природа рассматривается как незаинтересованная, безразличная к операции сторона (она пассивна по отношению к ЛПР). Такие операции исследуются с применением теории статистических решений.

Неопределенность в обстановке приводит к неопределенности оценки решений, заключающейся в том, что не известно, как оценивать решения по всем состояниям обстановки. Для разрешения неопределенности может использоваться только один путь - введение некоторых субъективных вероятностей. По этой причине единого критерия оценки эффективности для неопределенных операций не существует. Разработаны лишь общие требования к критериям и процедурам оценки и выбора оптимальных решений. Общими требованиями являются следующие:

1) оптимальное решение не должно меняться с перестановкой строк и столбцов матрицы эффективности;

2) оптимальное решение не должно меняться при добавлении тождественной строки или тождественного столбца к матрице эффективности;

3) оптимальное решение не должно меняться от добавления постоянного числа к значению каждого элемента матрицы эффективности;

4) оптимальное решение не должно становиться неоптимальным, а неоптимальное - оптимальным в случае добавления новых решений, среди которых нет ни одного более эффективного;

5) если решения $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{x}_j$ оптимальны, то вероятностная смесь этих решений тоже должна быть оптимальна.

Оценка и выбор решения проводятся применительно к условиям конкретной операции на основе неформальных соображений.

В зависимости от характера предпочтений ЛПР в неопределенных операциях используются следующие критерии:

- среднего выигрыша;
- Лапласа;
- Вальда (максимина, осторожного наблюдателя);
- Максимакса;
- Гурвица (обобщенного максимина);
- Сэвиджа (минимального риска, минимаксных потерь).

Рассмотрим некоторые из получивших широкое распространение критериев оценки эффективности.

Критерий среднего выигрыша. Он предполагает задание (хотя бы ориентировочное) вероятностей состояния обстановки p_j (j = 1,...,n). Эффективность решения оценивается как среднее ожидаемое значение (математическое ожидание) оценок эффективности по всем состояниям обстановки:

$$U(x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Оптимальному решению будет соответствовать эффективность

$$U_o = \max_i \sum_{j=1}^{n} p_j u_{ij} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для применения критерия среднего выигрыша по существу необходим перевод операции из неопределенной в вероятностную, причем произвольным образом.

Критерий Лапласа. В основе критерия лежит следующее предположение: поскольку о состояниях обстановки ничего не известно, то их можно считать равновероятными. Исходя из этого

$$U(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m;$$

$$U_o = \max_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right) \quad i = 1, \ldots, m.$$

Критерий Лапласа представляет собой частный случай критерия среднего выигрыша.

Критерий максимина (**Вальда**). Основывается на том, что если состояние обстановки не известно, нужно поступать самым осторожным образом, ориентируясь на минимальное значение эффективности каждого решения. В каждой строке матрицы эффективности находится минимальная из оценок решения по различным состояниям обстановки

$$U(x_i) = \min_j u_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Оптимальным решением считается решение из строки с максимальным значением эффективности

$$U(x_i) = \max_i \left(\min_j u_{ij} \right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Максиминный критерий ориентирует на решение, не содержащее элементов риска - при любом из возможных состояний обстановки результат операции оказывается не хуже найденного максимина. В ряде случаев такая осторожность является недостатком критерия. Другой недостаток - он не удовлетворяет требованию 3 (добавление постоянного числа к каждому элементу столбца матрицы эффективности влияет на выбор решения).

Критерий максимакса. Этим критерием предписывается оценивать решения по максимальному значению эффективности и выбирать в качестве оптимального решение, обладающее эффективностью с наибольшим из максимумов:

$$U(x_i) = \max_j u_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

$$U(x_i) = \max_i \left(\max_j u_{ij} \right), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Критерий максимакса - самый оптимистический критерий. Те, кто предпочитает им пользоваться, всегда надеются на лучшее состояние обстановки и в большей степени рискуют.

Критерий обобщенного максимина (**Гурвица**). Согласно данному критерию при оценке и выборе решений неразумно проявлять как осторожность, так и азарт, а следует, учитывая самое высокое и самое низкое значение эффективности, занимать промежуточную позицию. Для этого вводится коэффициент оптимизма α $(0 \le \alpha \le 1)$, характеризующий отношение ЛПР к риску. эффективность решения находится как взвешенная с помощью коэффициента α сумма максимальной и минимальной оценок:

$$U(x_i) = \alpha \max_j u_{ij} + (1-\alpha) \min_j u_{ij}; \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Условие оптимальности записывается в виде

$$U_o = \max_i \left[\alpha \max_j u_{ij} + (1-\alpha) \min_j u_{ij} \right]; \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

При $\alpha = 0$ критерий Гурвица сводится к критерию максимина, при $\alpha = 1$ - к критерию максимакса. На практике используются значениями этого коэффициента в пределах 0,3 -0,7.

Критерию Гурвица присущи следующие недостатки:

1) не известно, как выбирать для конкретной операции значение коэффициента оптимизма α;

2) не выполняются требования 4 и 5.

Критерий минимаксных потерь. Для оценки решений на основе данного критерия матрица эффективности должна быть преобразована в матрицу потерь (риска). Каждый элемент матрицы потерь определяется как разность между максимальным и текущим значениями оценок в столбце:

$$\Delta U_{ij} = \max_i u_{ij} - u_{ij}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n.$$

После преобразования матрицы используется критерий минимакса:

$$U(x_i) = \max_j \Delta u_{ij}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n;$$

$$U_o = \min_i (\max_j \Delta u_{ij}), \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n.$$

Критерий минимаксных потерь отражает сожаление по поводу того, что выбранное решение не оказалось наилучшим при определенном состоянии обстановки. Этот критерий, как и критерий Вальда относится к числу осторожных критериев. По сравнению с критерием Вальда в нем придается несколько большее значение выигрышу, чем проигрышу. Основной недостаток критерия - не выполняется требование 4.

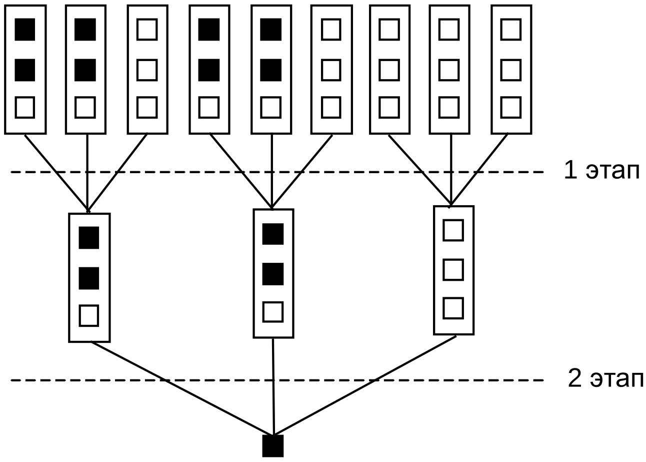
Таким образом, эффективность решений в неопределенных операциях может оцениваться по целому ряду критериев. На выбор того или иного критерия оказывают влияние следующие факторы:

- природа конкретной операции и ее цель (в одних операциях допустим риск, в других - гарантированный результат);
- причины неопределенности;
- характер ЛПР (склонность или несклонность к риску).

Выбор какого-то одного критерия приводит к принятию решения, которое может быть совершенно отличным от решений, диктуемых другими критериями.

Тип критерия для выбора рационального варианта должен оговариваться на этапе анализа системы, согласован с заказчиком и в последующих задачах синтеза систем предполагается заданным. Процесс выбора вида критерия для учета неопределенности является довольно сложным. Устойчивость выбранного рационального варианта можно оценить на основе анализа по нескольким критериям. Если существует совпадение, то имеется большая уверенность в правильности выбора варианта.

В случаях, когда решения, выбранные по различным критериям, конкурируют между собой за право быть окончательно выбранным, могут применяться процедуры, основанные на мажоритарной обработке результатов оценки по простому большинству голосов. Однако при группировке альтернатив в коалиции имеется опасность выбора системы, не являющейся лучшей.



Из существования нескольких критериев оценки эффективности решений для неопределенных операций вытекает необходимость поиска еще одного критерия (метакритерия), с помощью которого можно было бы определить, какой критерий является лучшим в каждой конкретной операции. Однако такой метакритерий пока не найден и вряд ли появится в ближайшем будущем.

Рассчитывать на высокую точность решения в неопределенной операции нельзя. В связи с этим практические задачи оценки и выбора решений с элементами неопределенности стремятся свести к вероятностным. В задачах, которые сохраняют неопределенную постановку, оценка и выбор решений осуществляются, как правило, на основе использования нескольких критериев. Рассмотрим два способа такой оценки.

Первый способ состоит в следующем:

- формируется множество решений $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_i\},\ \boldsymbol{i} = 1,\dots,\boldsymbol{m}$;
- определяется множество критериев эффективности $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{U}_k\},\ \boldsymbol{k} = 1,\dots,\boldsymbol{l}$;
- находится оценка каждого решения $\boldsymbol{x}_i\ (\boldsymbol{i} = 1,\dots,\boldsymbol{m})$ по каждому критерию $\boldsymbol{U}_k\ (\boldsymbol{k} = 1,\dots,\boldsymbol{l})$;
- выбирается решение или множество решений $\boldsymbol{X}^*$ с наиболее предпочтительными наборами значений эффективности.

Недостаток данного способа состоит в том, что поиск оптимального решения ведется перебором и нужно формировать все множество допустимых решений.

Второй способ предполагает следующие действия:

- определяется множество критериев эффективности $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{U}_k\},\ \boldsymbol{k} = 1,\dots,\boldsymbol{l}$;
- задается система ограничений, выделяющая область допустимых значений критериев эффективности $\boldsymbol{D}_U$;
- определяется вектор или область наиболее предпочтительных значений критериев эффективности $\boldsymbol{\Gamma}_U \subset \boldsymbol{D}_U$;
- находится решение или множество решений, соответствующих области $\boldsymbol{\Gamma}_U$.

Область $\boldsymbol{\Gamma}_U$ может определяться с помощью алгоритмов направленного перебора на основе использования свойств области $\boldsymbol{D}_U$. Основную трудность при реализации этого способа представляет нахождение решения (множества решений), соответствующего области с наиболее предпочтительными оценками $\boldsymbol{\Gamma}_U$.

При выделении множества решений окончательный выбор решения должен осуществляться лицом, принимающим решение.